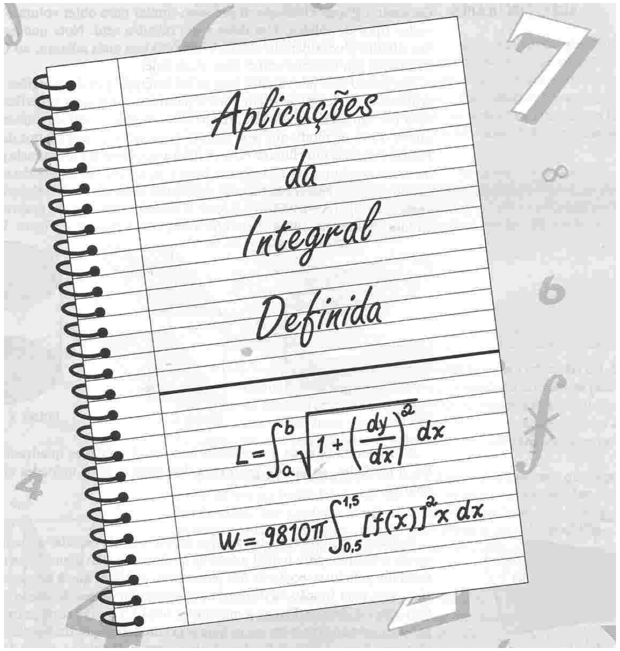
Cálculo Diferencial e Integral II

AULA 01

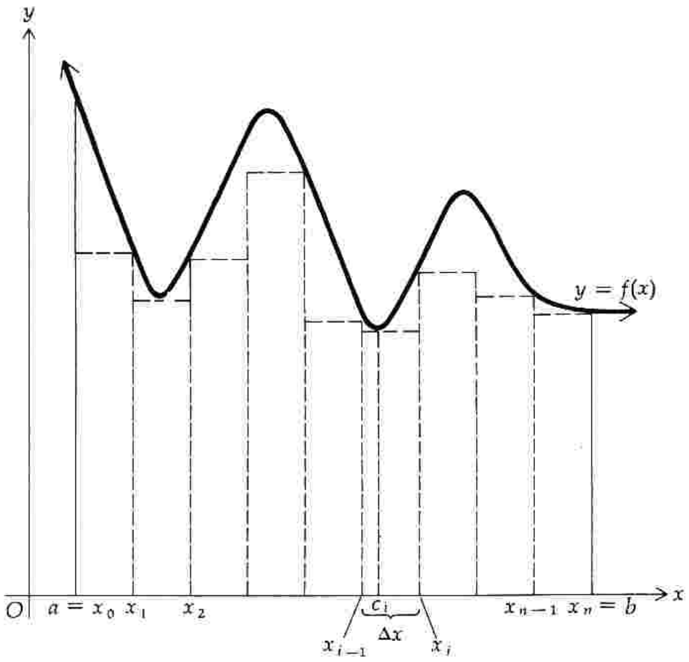


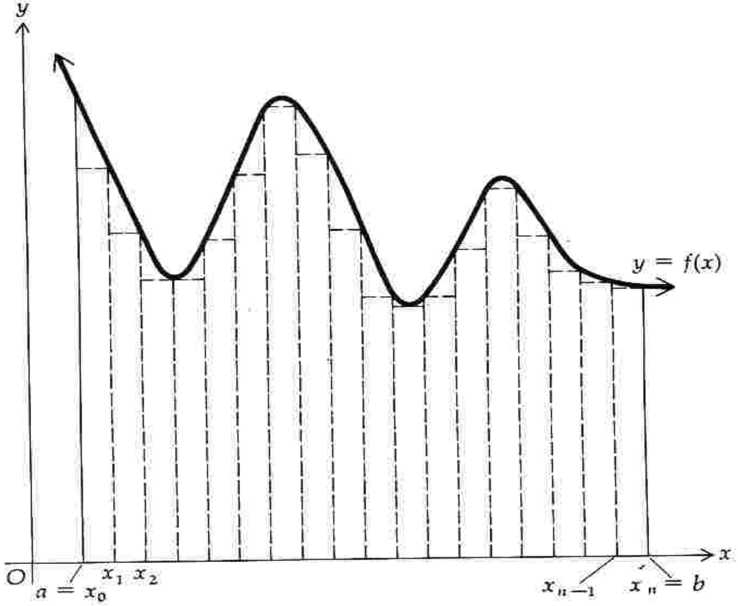
Curso: Engenharia Eletrônica
Professores:
Lourdes Brasil
Marcelino Andrade
Suélia Rosa

Cálculo Diferencial e Integral II

CAPÍTULO 6
APLICAÇÕES DA INTEGRAL DEFINIDA

Medida de Área

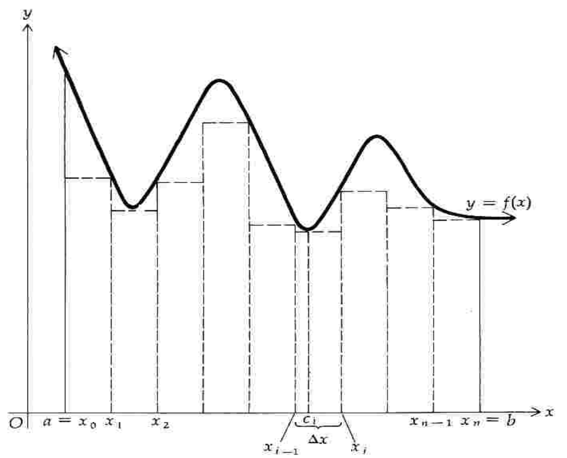


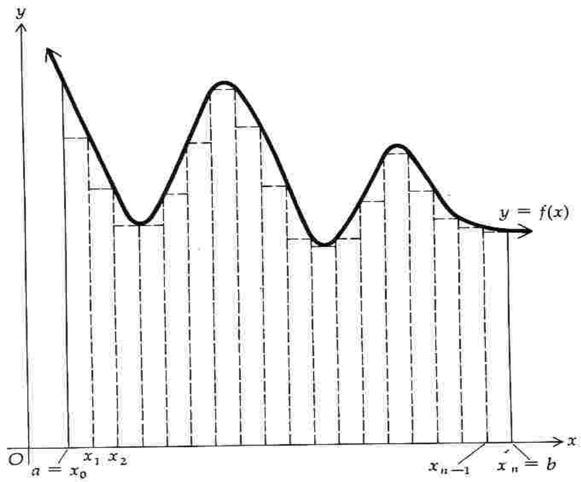


$$S_n = f(c_1)\,\Delta x + f(c_2)\,\Delta x + \ldots + f(c_i)\,\Delta x + \ \ldots + f(c_n)\,\Delta x$$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x$$

Definição: Medida de Área





$$S_n = f(c_1)\,\Delta x + f(c_2)\,\Delta x + \ldots + f(c_i)\,\Delta x + \ldots + f(c_n)\,\Delta x$$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x$$

5.4.8 DEFINIÇÃO

Suponha que a função f seja contínua no intevalo fechado $[a, b]$ com $f(x) \geqslant 0$ para todo x em $[a, b]$ e seja R a região limitada pela curva $y = f(x)$, o eixo x e as retas $x = a$ e $x = b$. Vamos dividir o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos, cada um com comprimento $\Delta x = (b - a)/n$ e vamos denotar o i-ésimo subintervalo por $[x_{i-1}, x_i]$. Então se $f(c_i)$ for o valor funcional mínimo absoluto no i-ésimo subintervalo, a medida da área da região R será dada por

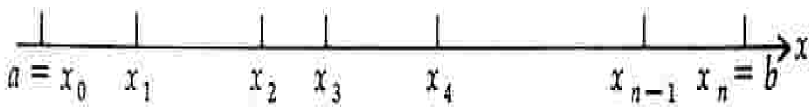
$$A = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x \qquad (6)$$

A igualdade (6) significa que para todo $\epsilon > 0$ existe um número $N > 0$ tal que se n for um inteiro positivo e se

$$n > N \text{ então } \left| \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x - A \right| < \epsilon$$

A Soma de Riemann

Seja f a função definida no intervalo fechado $[a, b]$.



$$x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n$$

Vamos escolher um ponto em cada subintervalo da partição Δ: seja ξ_1 o ponto escolhido em $[x_0, x_1]$ de tal forma que $x_0 \leqslant \xi_1 \leqslant x_1$. Tomemos ξ_2 como o ponto escolhido em $[x_1, x_2]$, de tal forma que $x_1 \leqslant \xi_2 \leqslant x_2$ e assim por diante, de forma que ξ_i seja o ponto escolhido em $[x_{i-1}, x_i]$ e $x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i$. Formamos, então, a soma

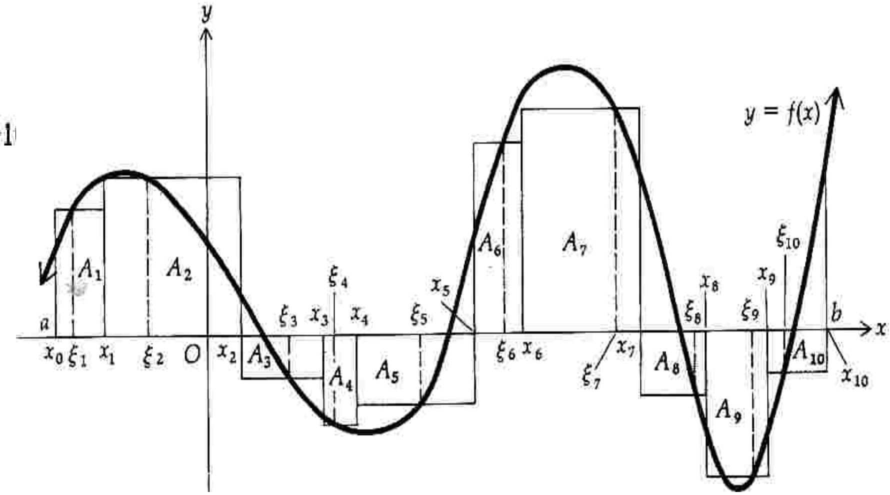
$$f(\xi_1)\,\Delta_1 x + f(\xi_2)\,\Delta_2 x + \ldots + f(\xi_i)\,\Delta_i x + \ldots + f(\xi_n)\,\Delta_n x \quad \text{ou} \quad \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta_i x$$

Medida de Área $\quad \lim\limits_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x \longrightarrow$ **?**

Definição: Soma de Riemann

$$\sum_{i=1}^{10} f(\xi_i)\,\Delta_i x = A_1 + A_2 - A_3 - A_4 - A_5 + A_6 + A_7 - A_8 - A_9 - A_1$$

pois $f(\xi_3)$, $f(\xi_4)$, $f(\xi_5)$, $f(\xi_8)$, $f(\xi_9)$ e $f(\xi_{10})$ são números negativos.



DEFINIÇÃO

Seja f uma função cujo domínio inclui o intervalo fechado $[a, b]$. Então, f será **integrável** em $[a, b]$ se existir um número L satisfazendo a seguinte condição: para todo $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que toda partição Δ para a qual $\|\Delta\| < \delta$, com ξ_i no intervalo fechado $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, temos

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta_i x - L \right| < \epsilon$$ Nessas condições, escrevemos $$\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta_i x = L$$

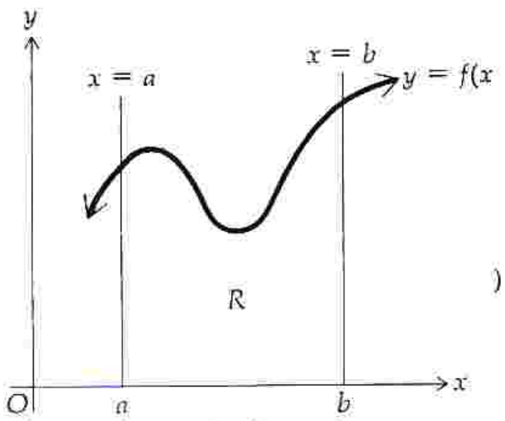
Definições: Integral Definida e Área

Se f for uma função definida no intervalo fechado $[a, b]$, então a **integral definida** de f de a até b, denotada por $\int_a^b f(x)\,dx$, será dada por

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi i)\,\Delta_i x$$

se o limite existir.

Integral Definida!!!!



Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e $f(x) \geqslant 0$ para todo x em $[a, b]$. Seja R a região limitada pela curva $y = f(x)$, pelo eixo x e pelas retas $x = a$ e $x = b$. Então, a medida A da área da região R é dada por

$$A = \lim_{\|\Delta x\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta_i x$$

$$\Leftrightarrow A = \int_a^b f(x)\,dx$$

Área!!!!

Exemplo: Integral Definida e Área

EXEMPLO 1 Ache a área da região no primeiro quadrante, limitada pela curva

$$y = x\sqrt{x^2 + 5}$$

pelo eixo x e pela reta $x = 2$. Faça um esboço.

SOLUÇÃO:

????

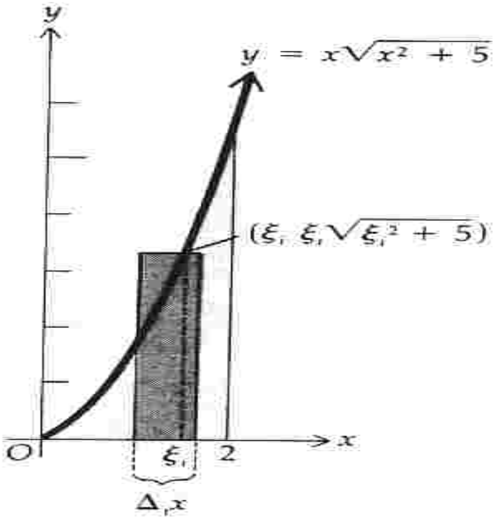
Exemplo: Integral Definida e Área

EXEMPLO 1 Ache a área da região no primeiro quadrante, limitada pela curva

$$y = x\sqrt{x^2+5}$$

pelo eixo x e pela reta $x = 2$. Faça um esboço.

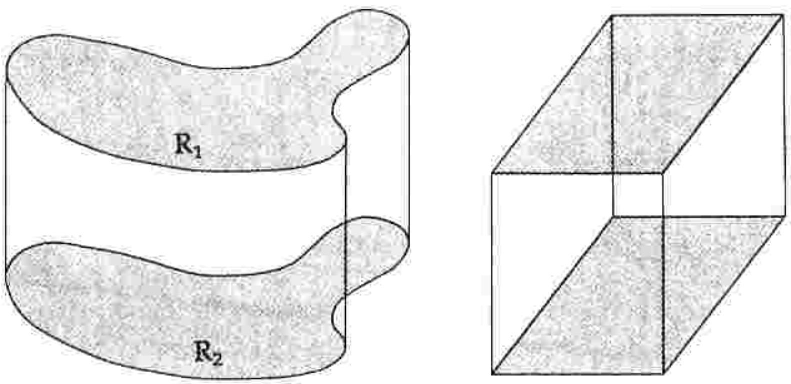
SOLUÇÃO:

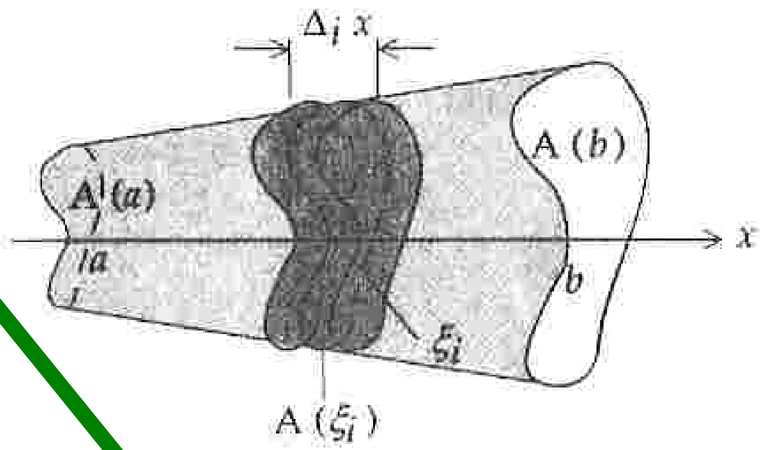


$$A = \lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\xi_i\sqrt{\xi_i^2+5}\,\Delta_i x = \int_0^2 x\sqrt{x^2+5}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^2\sqrt{x^2+5}\,(2x\,dx)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(x^2+5)^{3/2}\Big]_0^2 = \frac{1}{3}\left[(9)^{3/2}-(5)^{3/2}\right] = \frac{1}{3}(27-5\sqrt{5}) \approx 5{,}27$$

Volumes de Sólidos





Seja Δ uma partição do intervalo fechado $[a, b]$

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$$

n subintervalos $= [x_{i-1}, x_i]$

$i = 1, 2, \ldots, n$

$\Delta_i x = x_i - x_{i-1}$ = comprimento do i-ésimo subintervalo

número $\xi_i = x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i$

$\Delta_i x$ = unidades de altura

$A(\xi_i)$ = área das secções planas

$$\Delta_i V = A(\xi_i)\,\Delta_i x \quad \text{e}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta_i V = \sum_{i=1}^{n} A(\xi_i)\,\Delta_i x$$

Soma de Riemann!!

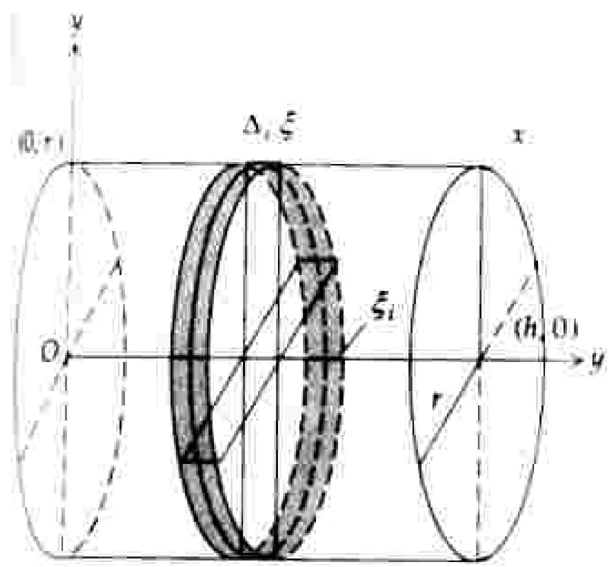
Definição: Medida de Volume

Seja S um sólido tal que S esteja entre planos perpendiculares ao eixo x em a e b. Se a medida da área da secção plana de S no plano perpendicular ao eixo x em x for dada por $A(x)$, onde A é contínua em $[a, b]$, então a medida do volume de S será dada por

$$V = \lim_{||\Delta|| \to 0} \sum_{i=1}^{n} A(\xi_i)\, \Delta_i x = \int_a^b A(x)\, dx = \int_a^b A(x)\, dx$$

Cilindro Reto

$$A(x) = \pi r^2$$



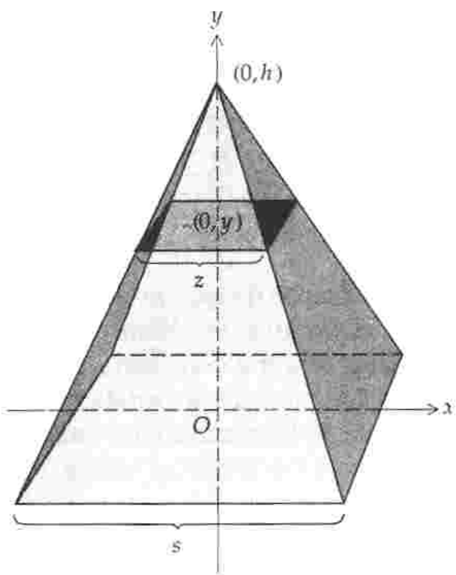
$$\begin{aligned} V &= \lim_{||\Delta|| \to 0} \sum_{i=1}^{n} A(\xi_i)\, \Delta_i x \\ &= \int_0^h A(x)\, dx \\ &= \int_0^h \pi r^2\, dx \\ &= \pi r^2 x \Big]_0^h \\ &= \pi r^2 h \end{aligned}$$

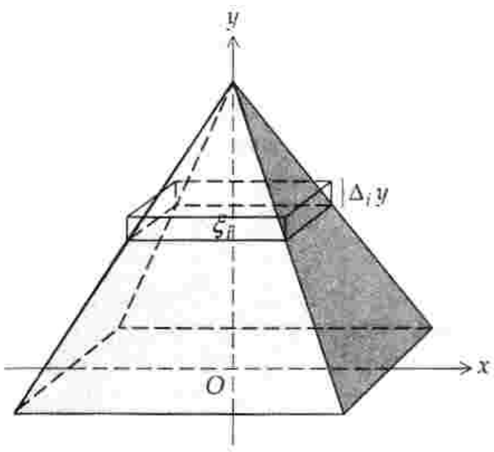
Exemplo: Medida de Volume

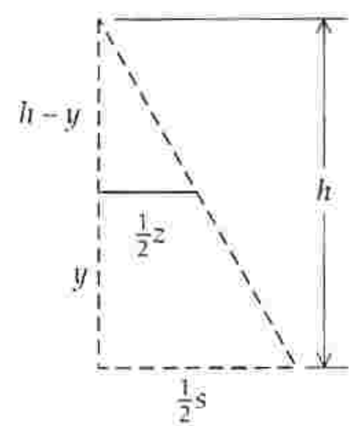
EXEMPLO 1 Use um corte para achar o volume de uma pirâmide reta cuja altura é h unidades e cuja base é um quadrado com s unidades de lado.

SOLUÇÃO:

$$V = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} A(\xi_i)\, \Delta_i x = \int_a^b A(x)\, dx$$



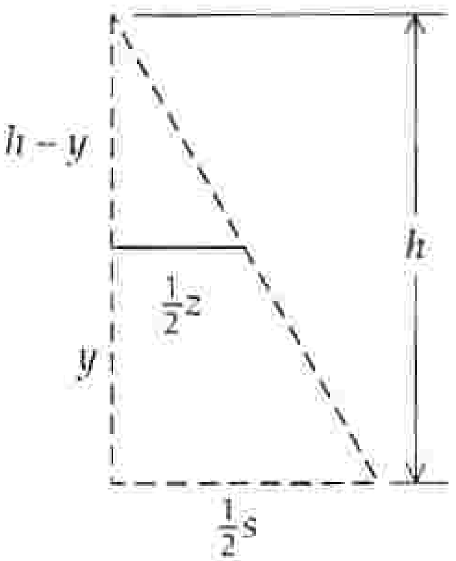




Exemplo: Medida de Volume

EXEMPLO 1 Use um corte para achar o volume de uma pirâmide reta cuja altura é h unidades e cuja base é um quadrado com s unidades de lado.

SOLUÇÃO: $V = \lim_{||\Delta|| \to 0} \sum_{i=1}^{n} A(\xi_i)\, \Delta_i x = \int_a^b A(x)\, dx$



1

$$\frac{\frac{1}{2}z}{h-y} = \frac{\frac{1}{2}s}{h} \rightarrow z = \frac{s}{h}(h-y) \rightarrow A(y) = \frac{s^2}{h^2}(h-y)^2$$

2

$$V = \lim_{||\Delta|| \to 0} \sum_{i=1}^{n} A(\xi_i)\, \Delta_i y = \int_0^h A(y)\, dy = \int_0^h \frac{s^2}{h^2}(h-y)^2\, dy$$

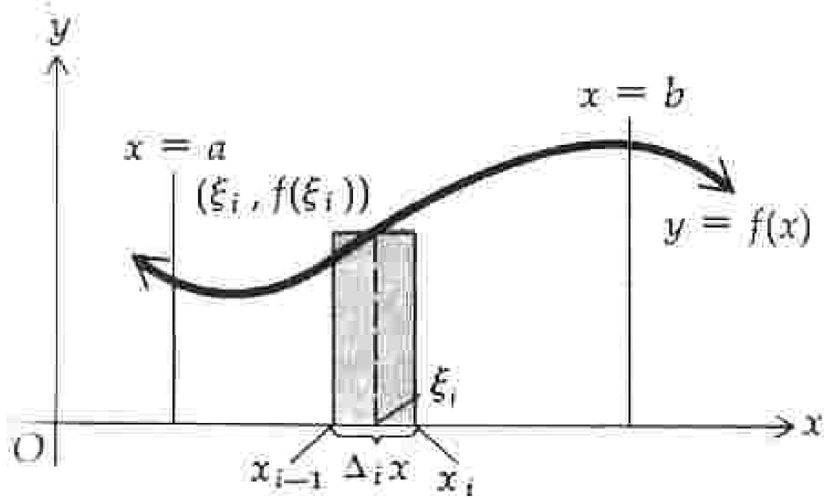
$$= \frac{s^2}{h^2}\left[-\frac{(h-y)^3}{3}\right]_0^h = \frac{s^2}{h^2}\left[0 + \frac{h^3}{3}\right] = \tfrac{1}{3}s^2 h$$

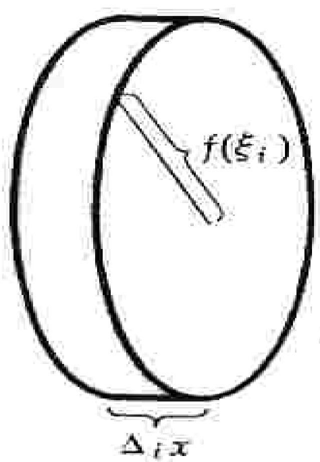
Teorema: Sólido de Revolução

Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e suponha que $f(x) \geqslant 0$ para todo x em $[a, b]$. Se S for o sólido de revolução obtido pela rotação efetuada, em torno do eixo x, da região limitada pela curva $y = f(x)$, pelo eixo x e pelas retas $x = a$ e $x = b$, e se V for o número de unidades cúbicas no volume de S, então

$$V = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi[f(\xi_i)]^2 \, \Delta_i x = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \, dx$$

Graficamente:





$$\Delta_i V = \pi[f(\xi_i)]^2 \, \Delta_i x$$

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta_i V = \sum_{i=1}^{n} \pi[f(\xi_i)]^2 \, \Delta_i x$$

Exemplos: Sólido de Revolução

EXEMPLO 2 Ache o volume do sólido gerado pela rotação em torno da reta $x = 1$, da região limitada pela curva

$$(x-1)^2 = 20 - 4y$$

e pelas retas $x = 1$, $y = 1$ e $y = 3$ e à direita de $x = 1$.

EXEMPLO 3 Ache o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo x, da região limitada pela parábola $y = x^2 + 1$ e pela reta $y = x + 3$.

EXEMPLO 4 Ache o volume do sólido gerado pela rotação, em torno da reta $x = -4$, da região limitada pelas parábolas $x = y - y^2$ e $x = y^2 - 3$.

Exemplos: Sólido de Revolução

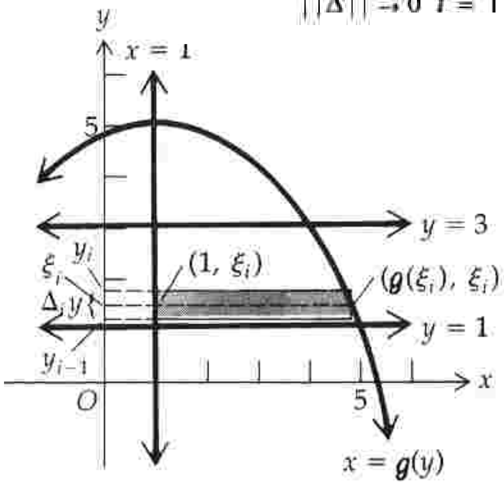
EXEMPLO 2 Ache o volume do sólido gerado pela rotação em torno da reta $x = 1$, da região limitada pela curva

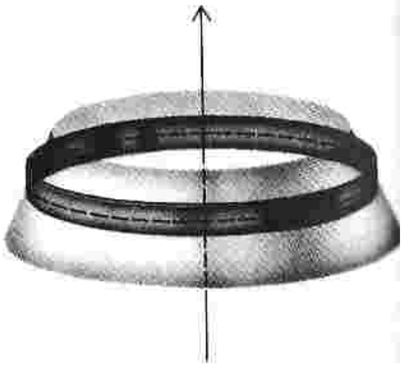
$$(x-1)^2 = 20 - 4y$$

e pelas retas $x = 1$, $y = 1$ e $y = 3$ e à direita de $x = 1$.

SOLUÇÃO:

$$V = \lim_{||\Delta|| \to 0} \sum_{i=1}^{n} A(\xi_i)\,\Delta_i x = \int_a^b A(x)\,dx$$





Exemplos: Sólido de Revolução

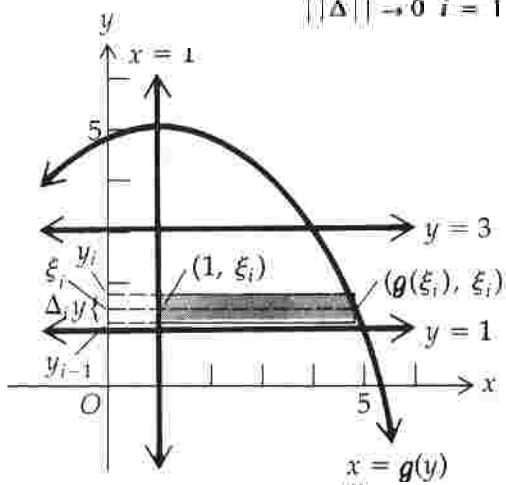
EXEMPLO 2 Ache o volume do sólido gerado pela rotação em torno da reta $x = 1$, da região limitada pela curva

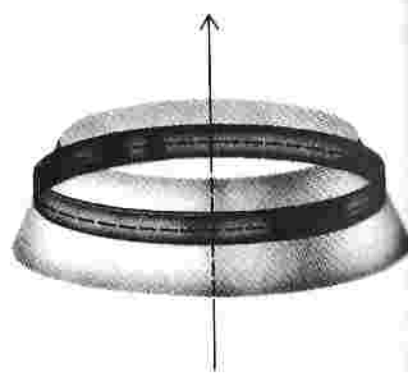
$$(x-1)^2 = 20 - 4y$$

e pelas retas $x = 1$, $y = 1$ e $y = 3$ e à direita de $x = 1$.

SOLUÇÃO:

$$V = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} A(\xi_i)\,\Delta_i x = \int_a^b A(x)\,dx$$





$$V = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi(20 - 4\xi_i)\,\Delta_i y = \pi \int_1^3 (20 - 4y)\,dy$$

Exemplos: Sólido de Revolução

EXEMPLO 2 Ache o volume do sólido gerado pela rotação em torno da reta $x = 1$, da região limitada pela curva

$$(x-1)^2 = 20 - 4y$$

e pelas retas $x = 1$, $y = 1$ e $y = 3$ e à direita de $x = 1$.

SOLUÇÃO:

$$V = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} A(\xi_i)\, \Delta_i x = \int_a^b A(x)\, dx$$

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta_i V = \sum_{i=1}^{n} \pi[f(\xi_i)]^2\, \Delta_i x$$

$$x = \sqrt{20 - 4y} + 1$$

$$g(y) = \sqrt{20 - 4y} + 1$$

intervalo $[1, 3]$ no eixo y

$$\begin{aligned} \Delta_i V &= \pi[g(\xi_i) - 1]^2\, \Delta_i y \\ &= \pi[(\sqrt{20 - 4\xi_i} + 1) - 1]^2\, \Delta_i y \\ &= \pi(20 - 4\xi_i)\, \Delta_i y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi(20 - 4\xi_i)\, \Delta_i y \\ &= \pi \int_1^3 (20 - 4y)\, dy \\ &= \pi \Big[20y - 2y^2 \Big]_1^3 \\ &= \pi[(60 - 18) - (20 - 2)] \\ &= 24\pi \end{aligned}$$

Exemplos: Sólido de Revolução

EXEMPLO 3 Ache o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo x, da região limitada pela parábola $y = x^2 + 1$ e pela reta $y = x + 3$.

Para a solução deste problema, faz-se necessário saber o Teorema 6.1.3.

?????

Teorema: Sólido de Revolução

TEOREMA 6.1.3

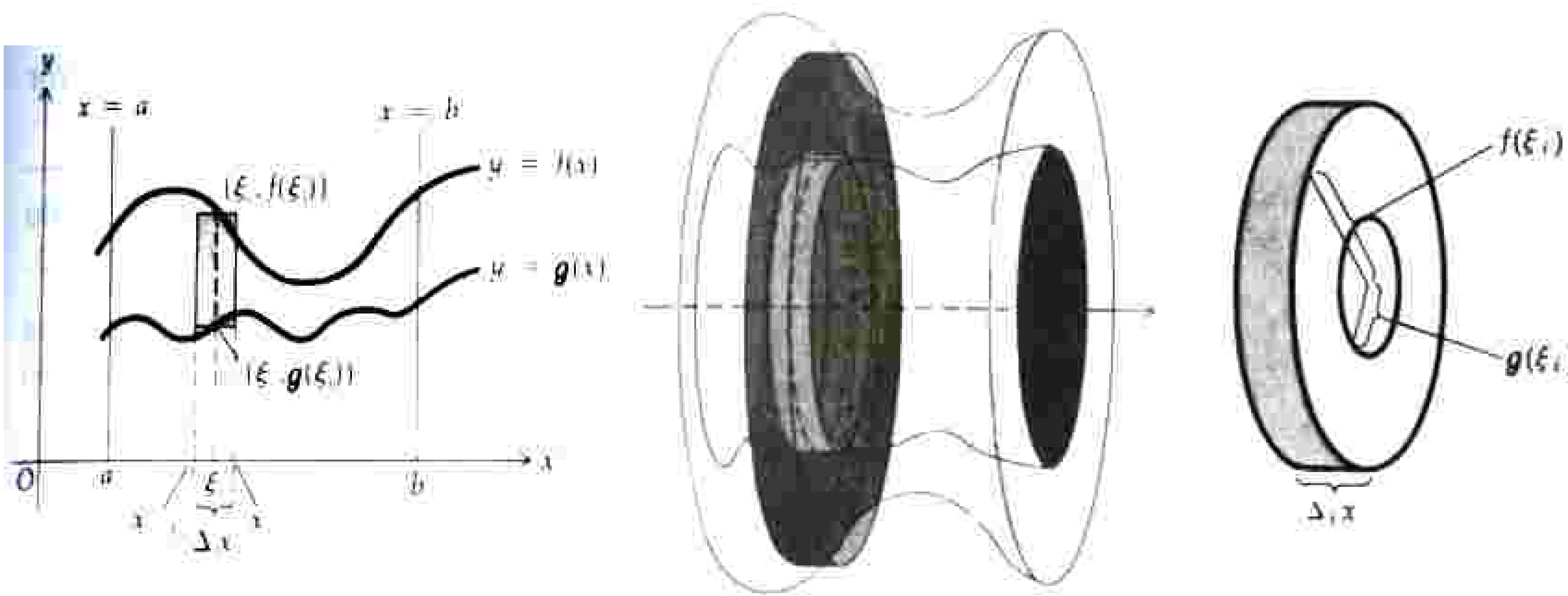
Sejam f e g funções contínuas no intervalo fechado $[a, b]$ e suponha que $f(x) \geqslant g(x) \geqslant 0$ para todo x em $[a, b]$. Então, se V unidades cúbicas for o volume do sólido de revolução gerado com a rotação, em torno do eixo x, da região limitada pelas curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ e pelas retas $x = a$ e $x = b$,

$$V = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi([f(\xi_i)]^2 - [g(\xi_i)]^2)\, \Delta_i x$$

$$= \pi \int_a^b ([f(x)]^2 - [g(x)]^2\, dx$$

Este teorema é para quando o eixo de revolução não está na fronteira da região a ser rotacionada.

Teorema: Sólido de Revolução

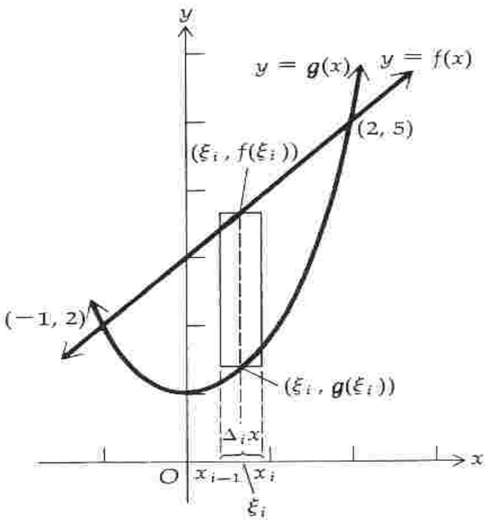


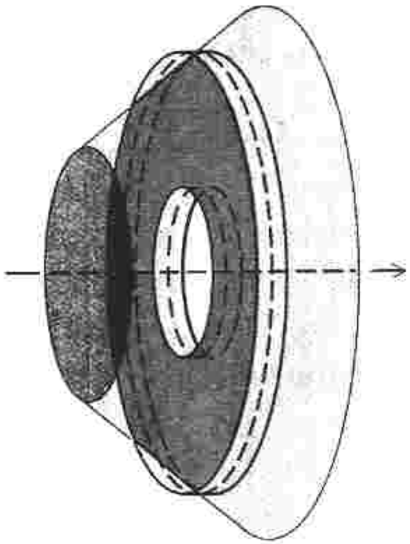
$$\Delta_i V = \pi([f(\xi_i)]^2 - [g(\xi_i)]^2)\,\Delta_i x$$

Exemplos: Sólido de Revolução

EXEMPLO 3 Ache o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo x, da região limitada pela parábola $y = x^2 + 1$ e pela reta $y = x + 3$.

SOLUÇÃO: $$V = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} A(\xi_i)\,\Delta_i x = \int_a^b A(x)\,dx$$



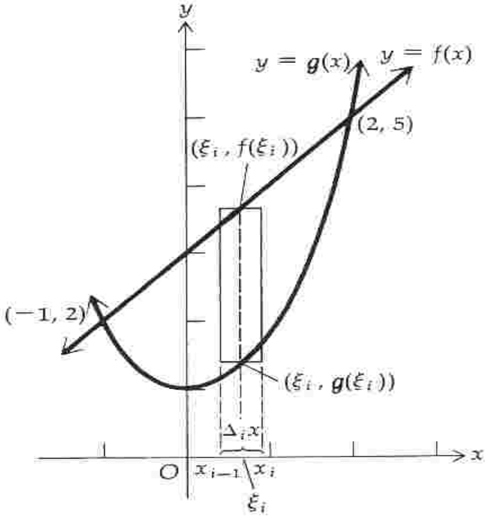


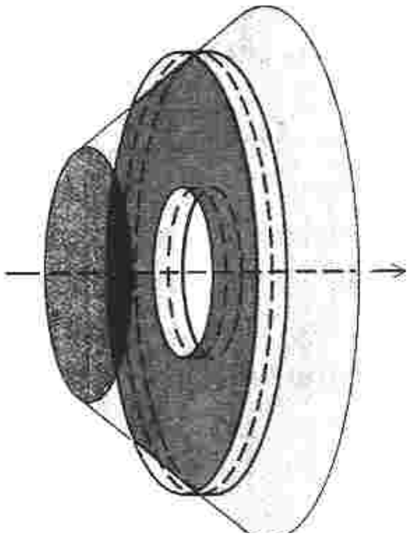
Exemplos: Sólido de Revolução

EXEMPLO 3 Ache o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo x, da região limitada pela parábola $y = x^2 + 1$ e pela reta $y = x + 3$.

SOLUÇÃO:

$$V = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} A(\xi_i)\, \Delta_i x = \int_a^b A(x)\, dx$$





$$V = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi([f(\xi_i)]^2 - [g(\xi_i)]^2)\, \Delta_i x = \pi \int_{-1}^{2} ([f(x)]^2 - [g(x)]^2)\, dx$$

Exemplos: Sólido de Revolução

EXEMPLO 3 Ache o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo x, da região limitada pela parábola $y = x^2 + 1$ e pela reta $y = x + 3$.

SOLUÇÃO:

$$V = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} A(\xi_i)\,\Delta_i x = \int_a^b A(x)\,dx$$

Os pontos de intersecção são $(-1, 2)$ e $(2, 5)$.

Se $f(x) = x + 3$ e $g(x) = x^2 + 1$

$$\Delta_i V = \pi([f(\xi_i)]^2 - [g(\xi_i)]^2)\,\Delta_i x$$

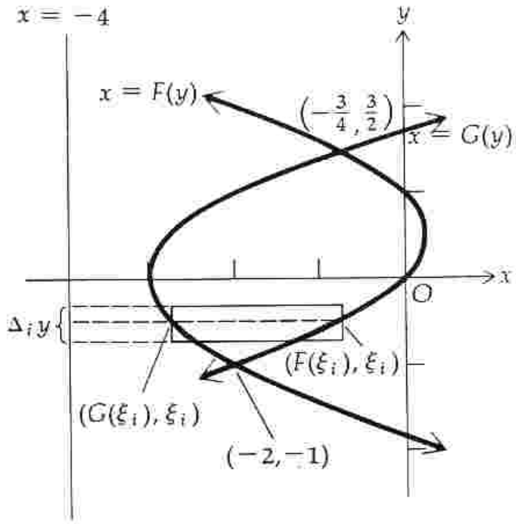
$$\begin{aligned}
V &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi([f(\xi_i)]^2 - [g(\xi_i)]^2)\,\Delta_i x \\
&= \pi \int_{-1}^{2} ([f(x)]^2 - [g(x)]^2)\,dx \\
&= \pi \int_{-1}^{2} [(x+3)^2 - (x^2+1)^2]\,dx \\
&= \pi \int_{-1}^{2} [-x^4 - x^2 + 6x + 8]\,dx \\
&= \pi\Big[-\tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{3}x^3 + 3x^2 + 8x\Big]_{-1}^{2} \\
&= [(-\tfrac{32}{5} - \tfrac{8}{3} + 12 + 16) - (\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{3} + 3 - 8)] \\
&= \tfrac{117}{5}\pi
\end{aligned}$$

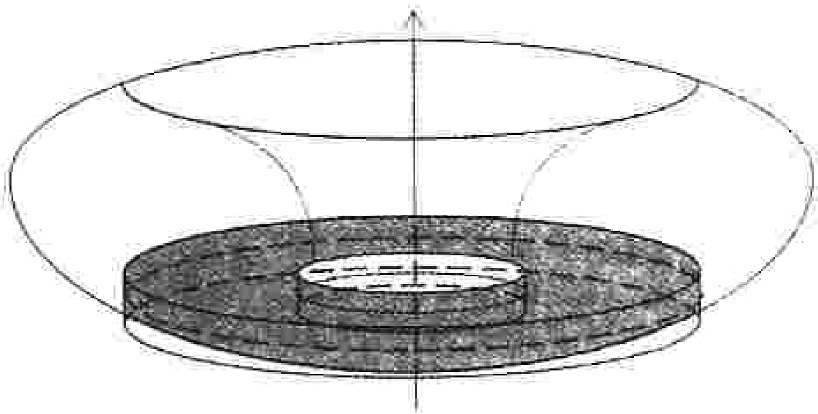
Exemplos: Sólido de Revolução

EXEMPLO 4 Ache o volume do sólido gerado pela rotação, em torno da reta $x = -4$, da região limitada pelas parábolas $x = y - y^2$ e $x = y^2 - 3$.

SOLUÇÃO:

$$V = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} A(\xi_i)\, \Delta_i x = \int_a^b A(x)\, dx$$





$$V = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi([4 + F(\xi_i)]^2 - [4 + G(\xi_i)]^2)\, \Delta_i y = \pi \int_{-1}^{3/2} [(4 + y - y^2)^2 - (4 + y^2 - 3)^2]\, dy$$

Exemplos: Sólido de Revolução

EXEMPLO 4 Ache o volume do sólido gerado pela rotação, em torno da reta $x = -4$, da região limitada pelas parábolas $x = y - y^2$ e $x = y^2 - 3$.

SOLUÇÃO: $$V = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} A(\xi_i)\,\Delta_i x = \int_a^b A(x)\,dx$$

As curvas interceptam-se nos pontos $(-2, -1)$ e $(-\frac{3}{4}, \frac{3}{2})$

$$F(y) = y - y^2$$

$$G(y) = y^2 - 3$$

$$\boxed{\Delta_i V = \pi([4 + F(\xi_i)]^2 - [4 + G(\xi_i)]^2)\,\Delta_i y}$$

Exemplos: Sólido de Revolução

EXEMPLO 4 Ache o volume do sólido gerado pela rotação, em torno da reta $x = -4$, da região limitada pelas parábolas $x = y - y^2$ e $x = y^2 - 3$.

SOLUÇÃO:

$$V = \lim_{||\Delta|| \to 0} \sum_{i=1}^{n} A(\xi_i)\, \Delta_i x = \int_a^b A(x)\, dx$$

$$\begin{aligned}
V &= \lim_{||\Delta|| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi\left([4 + F(\xi_i)]^2 - [4 + G(\xi_i)]^2\right) \Delta_i y \\
&= \pi \int_{-1}^{3/2} \left[(4 + y - y^2)^2 - (4 + y^2 - 3)^2\right] dy \\
&= \pi \int_{-1}^{3/2} (-2y^3 - 9y^2 + 8y + 15)\, dy \\
&= \pi \left[-\tfrac{1}{2}y^4 - 3y^3 + 4y^2 + 15y\right]_{-1}^{3/2} \\
&= \tfrac{875}{32}\pi
\end{aligned}$$

Volume de Sólido por invólucro Cilíndrico

Na secção precedente encontramos o volume de um sólido de revolução, tomando elementos retangulares de área perpendiculares ao eixo de revolução e o elemento de volume era um disco circular ou um anel circular.

Para alguns sólidos de revolução esse método pode não ser viável.

Método Novo

O método envolve tomar elementos retangulares de área, paralelos ao eixo de revolução. Então, quando um elemento de área for rotacionado em torno do eixo de revolução, obteremos um **invólucro cilíndrico**, ou seja, um sólido contido entre dois cilindros, com o mesmo centro e eixo.

Volume de Sólido por invólucro Cilíndrico

EXEMPLO 2 Ache o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo y, da região limitada pelo gráfico de $y = 3x - x^3$, pelo eixo y e pela reta $y = 2$.

?????

Teorema: Volume de Sólido por invólucro Cilíndrico

Seja f uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$, onde $a \geqslant 0$. Suponha que $f(x) \geqslant 0$ para todo x em $[a, b]$. Se R for a região limitada pela curva $y = f(x)$, pelo eixo x e pelas retas $x = a$ e $x = b$, se S for o sólido de revolução obtido pela sua rotação R em torno do eixo y e se V unidades cúbicas for o volume de S, então

$$V = \lim_{||\Delta|| \to 0} \sum_{i=1}^{n} 2\pi m_i f(m_i)\, \Delta_i x$$

$$= 2\pi \int_a^b x f(x)\, dx$$

$$V = 2\pi(\text{raio médio})\,(\text{altura})\,(\text{espessura})$$

Teorema: Volume de Sólido por invólucro Cilíndrico

Seja f uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$, onde $a \geqslant 0$. Suponha que $f(x) \geqslant 0$ para todo x em $[a, b]$. Se R for a região limitada pela curva $y = f(x)$, pelo eixo x e pelas retas $x = a$ e $x = b$, se S for o sólido de revolução obtido pela sua rotação R em torno do eixo y e se V unidades cúbicas for o volume de S, então

$$V = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} 2\pi m_i f(m_i)\, \Delta_i x$$

$$= 2\pi \int_a^b x f(x)\, dx \qquad 2\pi\,(\text{raio médio})\,(\text{altura})\,(\text{espessura})$$

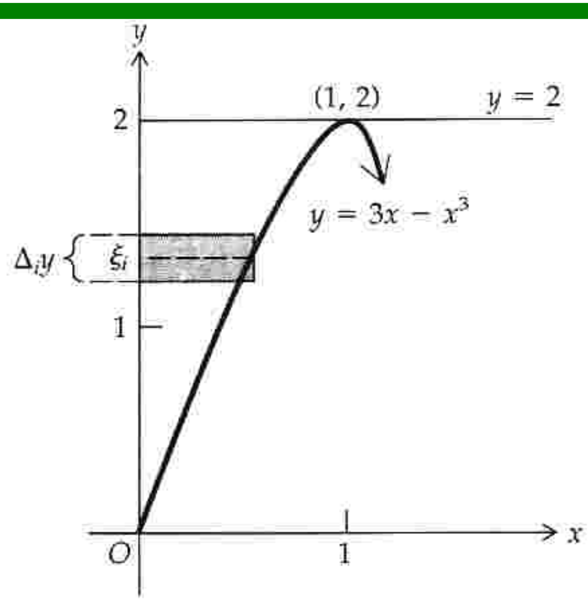
EXEMPLO 2 Ache o volume do sólido gerado pela rotação em torno do eixo y, da região limitada pelo gráfico de $y = 3x - x^3$, pelo eixo y e pela reta $y = 2$.

A SOLUÇÃO É FACILITADA!!!!!!

?????

Volume de Sólido por invólucro Cilíndrico

EXEMPLO 2 Ache o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo y, da região limitada pelo gráfico de $y = 3x - x^3$, pelo eixo y e pela reta $y = 2$.

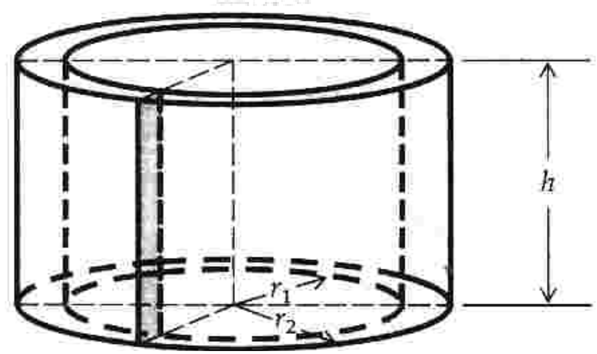


r_1 = raio interno

r_2 = raio externo

h = altura

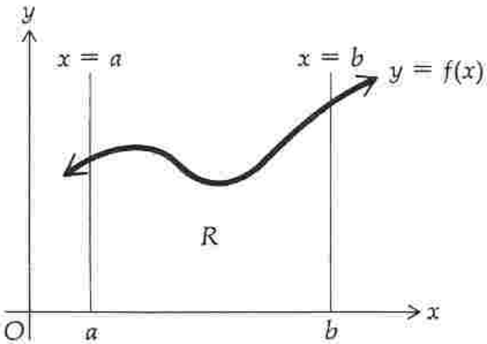
$$V = \pi r_2^2 h - \pi r_1^2 h$$

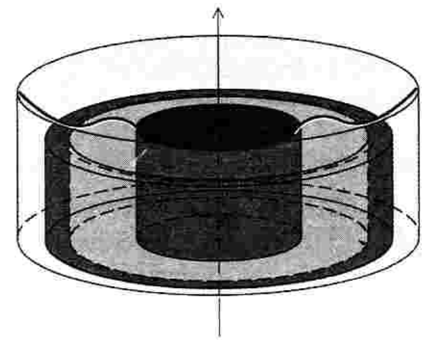


m_i = ponto médio do i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$

$f(m_i)$ = altura do retângulo

Volume de Sólido por invólucro Cilíndrico





$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

$$r_1 = x_{i-1},\ r_2 = x_i \text{ e } h = f(m_i),$$

$$m_i = \tfrac{1}{2}(x_{i-1} + x_i).$$

VOLUME!!!

$$\begin{aligned}\Delta_i V &= \pi x_i^{\,2} f(m_i) - \pi x_{i-1}^{\;2} f(m_i)\\ &= \pi(x_i^{\,2} - x_{i-1}^{\;2}) f(m_i)\\ &= \pi(x_i - x_{i-1})(x_i + x_{i-1}) f(m_i)\end{aligned}$$

Como $x_i - x_{i-1} = \Delta_i x$ e $x_i + x_{i-1} = 2m_i$,

$$\Delta_i V = 2\pi m_i f(m_i)\, \Delta_i x$$

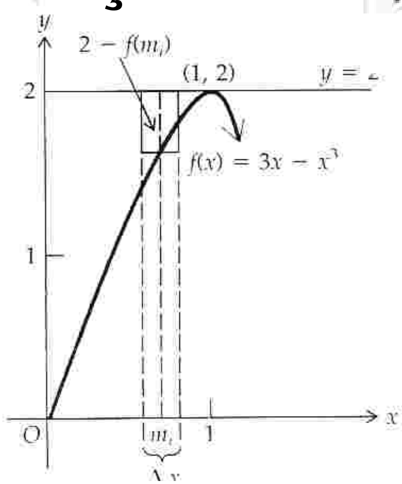
$$\sum_{i=1}^{n} \Delta_i V = \sum_{i=1}^{n} 2\pi m_i f(m_i)\, \Delta_i x$$

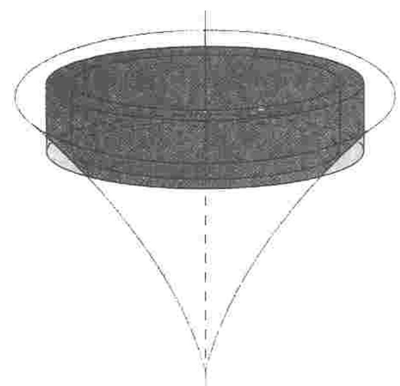
Exemplo: Volume de Sólido por invólucro Cilíndrico

EXEMPLO 2 Ache o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo y, da região limitada pelo gráfico de $y = 3x - x^3$, pelo eixo y e pela reta $y = 2$.

SOLUÇÃO:

$$V = \lim_{||\Delta|| \to 0} \sum_{i=1}^{n} 2\pi m_i f(m_i)\, \Delta_i x = 2\pi \int_a^b x f(x)\, dx$$





$$V = \lim_{||\Delta|| \to 0} \sum_{i=1}^{n} 2\pi m_i [2 - f(m_i)]\, \Delta_i x = 2\pi \int_0^1 x[2 - f(x)]\, dx$$

Exemplo: Volume de Sólido por invólucro Cilíndrico

EXEMPLO 2 Ache o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo y, da região limitada pelo gráfico de $y = 3x - x^3$, pelo eixo y e pela reta $y = 2$.

SOLUÇÃO: $$V = \lim_{||\Delta|| \to 0} \sum_{i=1}^{n} 2\pi m_i f(m_i)\, \Delta_i x = 2\pi \int_a^b x f(x)\, dx$$

$$f(x) = 3x - x^3$$

$$f(m_i) = [2 - f(m_i)]$$

$$\Delta_i V = 2\pi m_i [2 - f(m_i)]\, \Delta_i x$$

$$V = \lim_{||\Delta|| \to 0} \sum_{i=1}^{n} 2\pi m_i [2 - f(m_i)]\, \Delta_i x$$

$$V = 2\pi \int_0^1 x[2 - f(x)]\, dx = 2\pi \int_0^1 x(2 - 3x + x^3)\, dx$$

$$V = 2\pi \int_0^1 (2x - 3x^2 + x^4)\, dx = 2\pi \left[x^2 - x^3 + \frac{x^5}{5} \right]_0^1$$

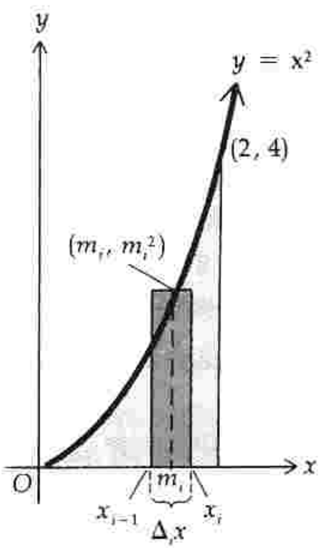
$$V = 2\pi(1 - 1 + \tfrac{1}{5})$$

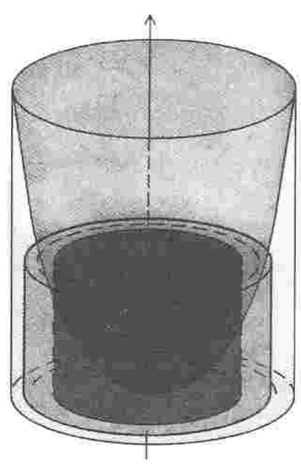
$$V = \tfrac{2}{5}\pi$$

Exemplo: Volume de Sólido por invólucro Cilíndrico

EXEMPLO 1 A região limitada pela curva $y = x^2$, pelo eixo x e pela reta $x = 2$ gira em torno do eixo y. Ache o volume do sólido gerado. Tome os elementos de área paralelos ao eixo de revolução.

SOLUÇÃO:





$$V = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} A(\xi_i)\, \Delta_i x = \int_a^b A(x)\, dx$$

$$V = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} 2\pi m_i f(m_i)\, \Delta_i x = 2\pi \int_a^b x f(x)\, dx$$

Exemplo: Volume de Sólido por invólucro Cilíndrico

EXEMPLO 1 A região limitada pela curva $y = x^2$, pelo eixo x e pela reta $x = 2$ gira em torno do eixo y. Ache o volume do sólido gerado. Tome os elementos de área paralelos ao eixo de revolução.

SOLUÇÃO:

$$
\begin{aligned}
\Delta_i V &= 2\pi m_i (m_i^2)\, \Delta_i x \\
&= 2\pi m_i^3\, \Delta_i x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
V &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} 2\pi m_i^3\, \Delta_i x \\
&= 2\pi \int_0^2 x^3\, dx \\
&= 2\pi \left(\tfrac{1}{4}x^4\right)\Big]_0^2 \\
&= 8\pi
\end{aligned}
$$

Cálculo Diferencial e Integral II

CAPÍTULO 6

APLICAÇÕES DA INTEGRAL DEFINIDA

Próxima aula!!